12 ЛЕКЦИЯ_ **ҚОЗҒАЛЫСТЫҢ КАНОНДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ**

Бұл дәрісте жүйелер динамикасын сипаттаудың негізгі тәсілдерінің бірі – канондық формализмді қарастырамыз. Канондық теңдеулер – физикалық жүйенің фазалық кеңістіктегі эволюциясын сипаттайтын теңдеулер жиынтығы болып табылады. Олар жүйенің энергиясы мен оның координаталары және олардың моменттері арасындағы байланысты орнататын Гамильтон принципіне негізделген.

Канондық формализмнің негізгі идеясы жүйені жалпыланған координаталар мен оларға сәйкес жалпыланған моменттердің жиынтығы ретінде көрсету болып табылады. Осы орайда жалпыланған координаталар мен моменттер жүйенің толық сипаттамасын береді және оның ішкі байланыстары мен сақталған шамаларды қанағаттандырады.

Канондық теңдеулерді қолдана отырып, жүйенің қозғалыс заңдарын алуға, оның энергиясын анықтауға және оның динамикасын зерттеуге болады. Канондық формализм жүйедегі потенциалдық күштер, диссипативті күштер немесе магнит өрістері сияқты өзара әрекеттесулердің әртүрлі түрлерін есепке алуға мүмкіндік береді.

Тарауда біз канондық формализмнің негізгі принциптерін, соның ішінде Гамильтон принципін және ең аз әсер принципін қарастырамыз. Біз Лагранж теңдеулерін канондық теңдеулерге түрлендіру процесін зерттейміз және Гамильтон, Пуассон жақшалары және канондық түрлендірулер сияқты осы формализмде қолданылатын негізгі ұғымдар мен терминологияны түсіндіреміз.

Канондық формализм физиканың көптеген салаларында, соның ішінде классикалық механикада, статистикалық механикада, кванттық механикада және өріс теориясында кеңінен қолданылады. Бұл жүйелердің динамикасын зерттеудің қуатты құралы және физика ғылымы тұрғысынан мағыналы нәтижелерді алуға мүмкіндік береді.

Пуассон жақшалары. Пуассон жақшаларының қасиеттері. Якоби теңдігі

Пуассон жақшалары теориялық механиканың маңызды құралдарының бірі болып табылады. Оларды 19 ғасырдың басында француз математигі Симеон Денис Пуассон енгізген және механикалық жүйедегі динамикалық айнымалыларды байланыстыратын алгебралық операция болып табылады.

Пуассон жақшаларын уақыт бойынша жүйенің эволюциясын сипаттау және физикалық шамалардың алгебралық қасиеттерін есептеу үшін пайдалануға болады. Сонымен қатар, олар бастапқы шарттар мен қозғалыс теңдеулерін ескере отырып, жүйенің қозғалысын сипаттауға мүмкіндік береді.

Кез-келген $f(p,q,t)$ функциясын – координата, импульс және уақыттың функциясы ретінде қарастыралық. Оның уақыт бойынша толық туындысын қарастыратын болсақ

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \tag{1}$$

Гамильтон теңдеулерін қолданамыз

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{2}$$

(1)-ге қойғанда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \tag{3}$$

Мынадай белгілеу енгіздік

$$\{H, f\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \tag{4}$$

H және f -ке арналған өрнекті *Пуассон жақшалары* деп атайды.

Жүйенің қозғалысы кезінде тұрақты болып қалатын динамикалық айнымалыларға тәуелді осындай функцияларды біз қозғалыс интегралдары деп аталатынын білеміз. (3) өрнегінде көріп тұрғандай, f -тің қозғалыс интегралы болуы шарты ретінде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \tag{5}$$

деп жазуға болады. Егер де қозғалыс интегралы анық уақыттан тәуелсіз болса

$$\{H, f\} = 0, \tag{6}$$

яғни, оның Гамильтон функциясымен жасаған Пуассон жақшасы нөлге айналуы тиіс. Кез-келген f және g шамаларының құраған Пуассон жақшалары да осындай жолмен табылады

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{7}$$

Енді осы анықтамаларды қолданып Пуассон жақшаларының қасиеттерін көрсетелік. Егер де функциялардың орнын алмастырса, жақшаның таңбасы өзгереді:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \tag{8}$$

Егер функциялардың бірі тұрақты шама болса, жақша нөлге айналады:

$$\{fc\} = 0. \tag{9}$$

Әрі қарай:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{10}$$

немесе

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2 g\} + f_2\{f_1 g\}. \qquad (11)$$

(7) уақыт бойынша дербес туынды алып:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \qquad (12)$$

Егер f және g функцияларының бірі импульс немесе координаттың бірімен сәйкес келсе, Пуассон жақшалары жай ғана дербес туындыны көрсетеді деуге болады

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \qquad (13)$$

немесе

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \qquad (14)$$

$\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, ал $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$ болғандықтан (13) формуланы (7) өрнектегі $g = q_k$ қойып алуға да болады.

(13) және (14)-ке q_i және p_i тең функцияларды қойып

$$\{q_i q_k\} = 0, \{p_i p_k\} = 0, \{p_i p_k\} = \delta_{ik}. \qquad (15)$$

Сонымен Пуассон жақшаларының үш функциялар арқылы жазылған қатынасты *Якоби теңдігі* деп атайды:

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0. \qquad (16)$$

Пуассон жақшаларының маңызды қасиеті болып табылатын Якоби теңдігі олардың ассоциативтілігін атап көрсетеді. Бұл теңдік Пуассон жақшаларындағы айнымалылардың үш еселігі арасындағы тепе-теңдікті білдіреді және нәтижені өзгертпестен оларды қайта реттеуге болатынын көрсетеді.

Бұл теңдікті дәлелдеу үшін мына мәселелерді ескеру қажет: (7) анықтамасы бойынша $\{fg\}$ Пуассон жақшалары қоссызықты біртекті f және g шамаларының бірінші дәрежелі туындысының функциясы болып табылатын. Себебі ол бірінші және екінші аргументтерде де сызықты болады. Сондай-ақ оны біртекті деген себебіміз, ол аргументтердің бірін тәуелсіз санға көбейткенде өз мәнін сақтайды. Мысалыға, $\{h\{fg\}\}$ жақшасы сызықты біртекті f және g шамаларының екінші дәрежелі туындысының функциясы болып табылады; (16) теңдігінің сол жағы сызықты біртекті f, g және h функцияларының екінші дәрежелі туындысының функциясы болады; f - тің екінші дәрежелі туындысынан тәуелді бүкіл мүшелерді жинақтаймыз; Бірінші жақшада тек f - тің бірінші дәрежелі туындылары ғана бар; Екінші және үшінші жақшалардың қосындысын шартты түрде, D_1 және D_2 сызықты дифференциалдық оператор енгіземіз.

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\} \tag{17}$$

Сонда

$$\{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = \{g\{hf\}\} - \{h\{fg\}\} =$$

$$= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)f. \tag{18}$$

Осындай сызықтық дифференциалдық операторлардың комбинациясында f - тің екінші дәрежелі туындысының болмайтыны көрініп тұр. Шынында сызықтық дифференциалдық операторлардың жалпы түрі

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{19}$$

мұндағы ξ_k, η_k - x_1, x_2,… айнымалыларының қалауымызша алатын функциясы. Сонда

$$D_1D_2 = \sum_{k,l} \xi_k\eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l} \tag{20}$$

$$D_2D_1 = \sum_{k,l} \eta_k\xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l} \tag{21}$$

Ал олардың туындыларының айырмасы

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,l}(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k})\frac{\partial}{\partial x_l} \tag{22}$$

Мұндағы оператор, тағы да бірінші реттік дифференциалдау арқылы берілген. Сондықтан (7) теңдеуінің сол жағындағы f - тің екінші дәрежелі туындысының барлық мүшелері өзара қысқарып кетеді де, өрнектің мәні нөлге тең болады.

Пуассон жақшасының тағы бір маңызды қасиетінің бірі, егер f және g қозғалыс интегралы болса, олардың жақшалары да қозғалыс интегралы болып табылады және бұл *Пуассон теоремасы* деп аталады

$$\{fg\} = const. \tag{23}$$

Теореманың дәлелдемесін егер f және g уақыттан тәуелсіз десек, оның үстіне Якоби теңдігіне $h = H$ қойсақ

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0. \tag{24}$$

Осыдан $\{Hg\} = 0$ және $\{Hf\} = 0$ болғанда $H\{fg\} = 0$ екені дәлелденді.

(3) формуласын қолданып және Якоби теңдігіндегі $H\{fg\}$ алмастырып

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\} + \left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f\{gH\}\} - \{g\{Hf\}\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\}\right\} \quad (25)$$

немесе

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\} \quad (26)$$

жалпы Пуассон теоремасы осыдан дәлелденді.

Сызықтық әртүрлі айнымалылар мен олардың сызықтық комбинациялары үшін Пуассон жақшаларын біріктіруге және есептеуге мүмкіндік береді; Антикоммутативтілік Пуассон жақшаларындағы айнымалылардың реті нәтижеге әсер етпейтінін көрсетеді; Сәйкестік жалпыланған координаттар мен олардың канондық моменттері арасындағы Пуассон жақшасының бірге тең болуын қамтамасыз етеді.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Пуассон жақшалары дегеніміз не және олар теориялық механикада қандай рөл атқарады?
2. Пуассон жақшаларының қандай қасиеті жеке айнымалылардағы сызықтыққа кепілдік береді?
3. Пуассон жақшаларының антикоммутативтілігі нені білдіреді?
4. Пуассон жақшаларының сәйкестігі қандай және ол айнымалылар арасындағы қандай қатынасты көрсетеді?
5. Пуассон жақшалары үшін Якоби теңдігі қалай тұжырымдалған және оның теориялық механикадағы маңызы қандай?
6. Пуассон жақшалары мен Якоби теңдігі физиканың қандай салаларында қолданылады?
7. Теориялық механикаға байланысты екі сызықты біртекті функцияларға қандай мысалдар келтіре аласыз?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.
2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.
3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5